Numeri relativi e operazioni

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Dall’insieme N all’insieme R^+

Nell’insieme **N** è sempre possibile eseguire l’addizione, la moltiplicazione e l’elevamento a potenza:

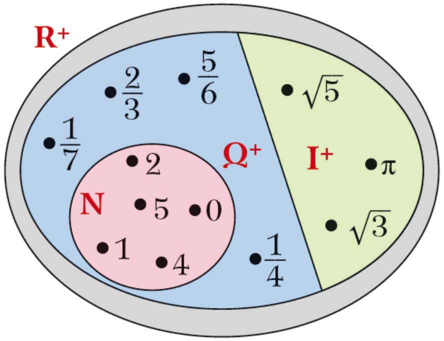
se $a, b \in \mathbf{N}$ allora $a + b \in \mathbf{N}$ $\quad a \cdot b \in \mathbf{N}$ $\quad a^n \in \mathbf{N}$

Le operazioni inverse: sottrazione, divisione ed estrazione di radice quadrata non sempre hanno risultato in **N**.

Nell’insieme $\mathbf{Q}^+$ è sempre possibile eseguire oltre che l’addizione, la moltiplicazione e l’elevamento a potenza anche la divisione:

se $a, b \in \mathbf{Q}^+$ allora $a + b \in \mathbf{Q}^+$ $\quad a \cdot b \in \mathbf{Q}^+$ $\quad a^n \in \mathbf{Q}^+$ $\quad \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}^+$

La sottrazione e l’estrazione di radice non sempre hanno risultato in Q^+.



L’insieme $\mathbf{I}^+$ non comprende l’insieme $\mathbf{Q}^+$ ma lo affianca e la loro unione genera l’insieme $\mathbf{R}^+$ dei numeri reali assoluti:

$$\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{I}^+ = \mathbf{R}^+$$

I due insiemi sono disgiunti: $\mathbf{Q}^+ \cap \mathbf{I}^+ = \emptyset$

Nell’insieme $\mathbf{R}^+$ è sempre possibile eseguire l’addizione,
la moltiplicazione, l’elevamento a potenza, la divisione e l’estrazione di radice:

se $a, b \in \mathbf{R}^+$ allora $a + b \in \mathbf{R}^+$ $\quad a \cdot b \in \mathbf{R}^+$ $\quad a^n \in \mathbf{R}^+$ $\quad \frac{a}{b} \in \mathbf{R}^+$ $\quad \sqrt[n]{a} \in \mathbf{R}^+$

Anche in $\mathbf{R}^+$ la sottrazione non è sempre possibile: dovremo quindi ampliare ancora gli insiemi numerici sin qui usati con i numeri dotati di segno che ci permettono di eseguire sempre la sottrazione.

Numeri reali relativi

I numeri preceduti dal segno + o dal segno − sono detti **numeri relativi**.

Il loro valore dipende da un valore di riferimento che si indica con zero:

- i numeri preceduti dal segno **+** si dicono **numeri positivi** e sono maggiori di zero;
- i numeri preceduti dal segno **−** si dicono **numeri negativi** e sono minori di zero.

Con questi numeri possiamo eseguire le sottrazioni in cui il sottraendo è maggiore del minuendo che sino a ora non potevamo eseguire:

$$a - b \quad \text{con} \quad b > a$$

I numeri relativi costituiscono un ampliamento degli insiemi **N**, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{I}^+$, $\mathbf{R}^+$.

Numeri reali relativi

DALL'INSIEME N ALL'INSIEME Z

L'insieme avente come elementi lo 0 e i numeri interi positivi si indica con il simbolo **Z⁺** e coincide con l'insieme **N**:

$\mathbf{Z}^+ = \{0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$

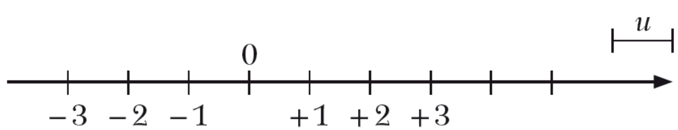
I numeri interi con segno − costituiscono l'insieme dei numeri interi negativi che si indica con il simbolo $\mathbf{Z}^-$:

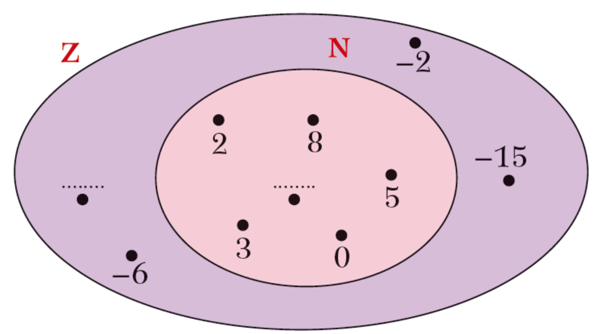
$\mathbf{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

L'unione degli insiemi $\mathbf{Z}^+$ e $\mathbf{Z}^-$ forma l'insieme **Z** dei numeri interi relativi:

$\mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{Z}^- = \mathbf{Z}$

L'insieme **Z** si può rappresentare su una retta orientata e con un diagramma di Venn:





La distanza dallo 0 è detta **valore assoluto**.

Numeri reali relativi

DALL'INSIEME Q^+ ALL'INSIEME Q

I numeri razionali preceduti dal segno + (0 compreso) costituiscono l'insieme dei **numeri razionali positivi $\mathbf{Q}^+$**:

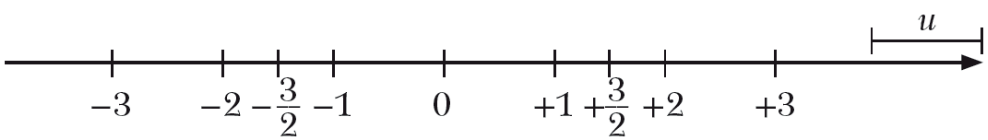
$$\mathbf{Q}^+ = \{0, +\frac{1}{3}, +1, +2, +\frac{7}{3}, ...\}$$

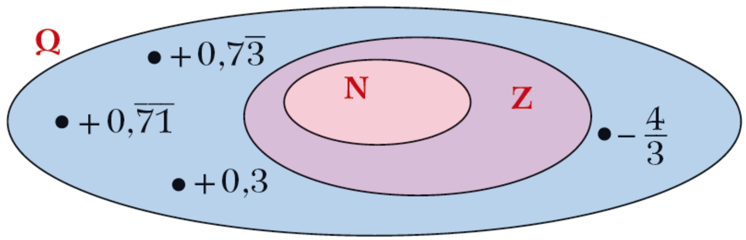
I numeri razionali preceduti dal segno − costituiscono l'insieme dei **numeri razionali negativi $\mathbf{Q}^-$**.

L'unione degli insiemi $\mathbf{Q}^+$ e $\mathbf{Q}^-$ costituisce l'insieme **Q** dei **numeri razionali relativi**:

$$\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- = \mathbf{Q}$$

Possiamo rappresentare l'insieme **Q** su una retta orientata e con un diagramma di Venn:





Lattes

Numeri reali relativi

DALL'INSIEME I^+ ALL'INSIEME I E DALL'INSIEME R^+ ALL'INSIEME R

Pensiamo ogni numero dell'insieme $\mathbf{I}^+$ dei numeri irrazionali positivi come numero irrazionale preceduto dal segno +; gli stessi numeri irrazionali preceduti dal segno − costituiscono l'insieme $\mathbf{I}^-$ degli irrazionali negativi.

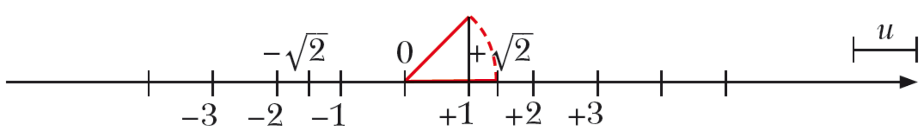
L'unione di $\mathbf{I}^+$ e $\mathbf{I}^-$ costituisce l'insieme **I** dei **numeri irrazionali relativi**:

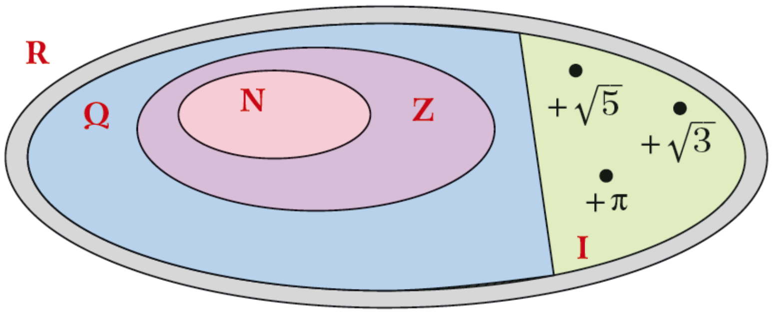
$$\mathbf{I}^+ \cup \mathbf{I}^- = \mathbf{I}$$

L'unione degli insiemi **Q** e **I** costituisce l'insieme **R** dei **numeri reali relativi** o semplicemente dei **numeri reali**:

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$$

Possiamo rappresentare **R** su una retta orientata o con un diagramma di Venn:





Caratteristiche dei numeri relativi

I numeri relativi, formati da un segno e da una parte numerica, si distinguono in:

- numeri **positivi** (con il segno + davanti);
- numeri **negativi** (con il segno – davanti).

Lo zero non è negativo né positivo.

Se di questi numeri consideriamo solo la parte numerica otterremo il **valore assoluto** o modulo del numero relativo che si indica:

$|-4| = 4$ e si legge *il valore assoluto di* -4 *è* 4

Il **valore assoluto** di un numero relativo è il numero stesso senza segno.

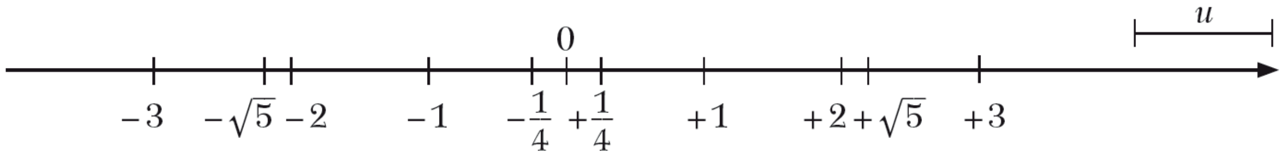
- Due **numeri relativi** con lo **stesso segno** sono detti **concordi**.
- Due **numeri relativi** con **segno diverso** sono detti **discordi**.
- Due **numeri relativi discordi** con **uguale valore assoluto** sono detti **opposti**.

Lattes

Caratteristiche dei numeri relativi

CONFRONTO FRA NUMERI RELATIVI

Per confrontare due numeri relativi osserviamo la loro posizione sulla retta numerica orientata:



- è maggiore quello che sta più a destra sulla retta orientata: $+3 > +\frac{1}{4}$ e $+\sqrt{5} > -\frac{1}{4}$
- è minore quello che sta più a sinistra: $-3 < -\frac{1}{4}$ e $0 < +\sqrt{5}$

Ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo:

$+\frac{1}{4} > -3$ $\qquad\qquad$ $+2 > -\sqrt{5}$

Lo zero è maggiore di ogni numero negativo e minore di ogni numero positivo:

$-\frac{3}{4} < 0 < +1$

Caratteristiche dei numeri relativi

Dati due numeri positivi, è maggiore quello con valore assoluto maggiore:

$+7 > +5$ $\qquad$ $+\frac{14}{23} > +\frac{14}{27}$

Dati due numeri negativi, è maggiore quello con valore assoluto minore:

$-5 > -7$ $\qquad$ $-\frac{1}{4} > -\frac{3}{4}$

Due numeri relativi sono uguali se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto:

$+3 = +3$ $\qquad$ $-\frac{11}{13} = -\frac{11}{13}$

Due numeri relativi sono disuguali se differiscono per il segno o per il valore assoluto:

$+7 \neq -7$ $\qquad$ $+\frac{12}{17} \neq +\frac{1}{3}$

Addizione nell'insieme R

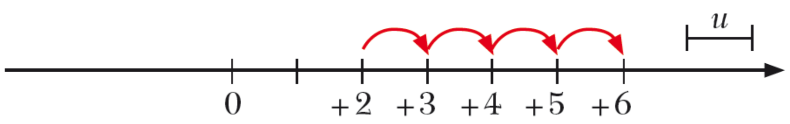
Nell'insieme **N l'addizione è l'operazione che associa a due numeri un terzo numero che si ottiene contando di seguito al primo tante unità quante ne indica il secondo**.

I termini dell'addizione possono essere due numeri relativi concordi o discordi racchiusi tra parentesi assieme al loro segno.

ADDENDI CONCORDI

La **somma** di due **numeri relativi concordi** è un numero relativo concorde con essi che ha per valore assoluto la somma dei loro valori assoluti.

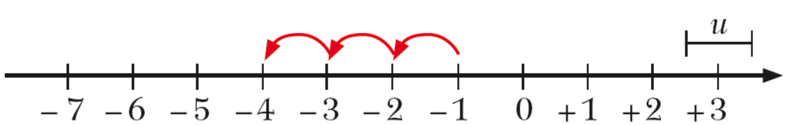
- **(+ 2) + (+ 4)**



Partiamo da + 2 e, poiché il secondo addendo è positivo, contiamo successivamente 4 unità nel verso positivo (a destra):

(+ 2) + (+ 4) = + 6

- **(– 1) + (– 3)**



Partiamo da – 1 e, poiché il secondo addendo è negativo, contiamo successivamente 3 unità nel verso negativo (a sinistra):

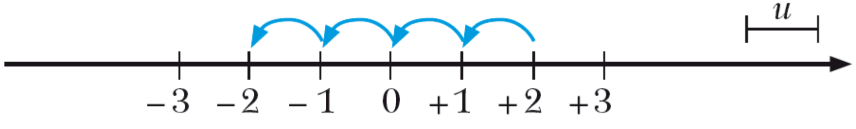
(– 1) + (– 3) = – 4

Addizione nell'insieme R

ADDENDI DISCORDI

La **somma** di due **numeri relativi discordi** è il numero relativo concorde con l'addendo avente valore assoluto maggiore e che ha il valore assoluto uguale alla differenza fra i loro valori assoluti.

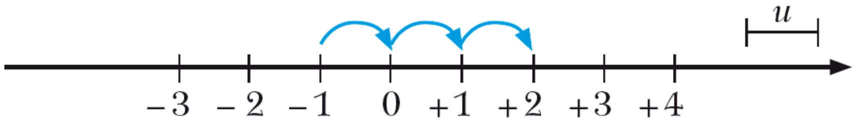
- **(+ 2) + (– 4)**



Partiamo da + 2 e, poiché il secondo addendo è negativo, contiamo successivamente 4 unità verso sinistra:

(+ 2) + (– 4) = – 2

- **(– 1) + (+ 3)**



Partiamo da – 1 e, poiché il secondo addendo è positivo, contiamo successivamente 3 unità verso destra:

(– 1) + (+ 3) = + 2

Con lo stesso procedimento è facile verificare che **la somma di due numeri relativi opposti è zero.**

Sottrazione nell'insieme R

Nell'insieme **N la sottrazione è l'operazione che associa a due numeri quel terzo numero, se esiste, che addizionato al secondo dà per somma il primo**.

La **differenza** fra due **numeri relativi**, dati in un certo ordine, si ottiene addizionando al minuendo l'opposto del sottraendo:

$(+9) - (+2) = \boldsymbol{x}$	$x = \mathbf{+7}$	infatti	$(+7) + (+2) = +9$
$(-9) - (+2) = \boldsymbol{x}$	$x = \mathbf{-11}$	infatti	$(-11) + (+2) = -9$
$(+9) - (-2) = \boldsymbol{x}$	$x = \mathbf{+11}$	infatti	$(+11) + (-2) = +9$
$(-9) - (-2) = \boldsymbol{x}$	$x = \mathbf{-7}$	infatti	$(-7) + (-2) = -9$

É possibile notare che si può ottenere lo stesso risultato addizionando al primo numero l'opposto del secondo:

$(+9) - (+2) = (+9) + (-2) = +7$

$(-9) - (+2) = (-9) + (-2) = -11$

$(+9) - (-2) = (+9) + (+2) = +11$

$(-9) - (-2) = (-9) + (+2) = -7$

Addizione algebrica nell'insieme R

L'**addizione algebrica** è una **successione di addizioni e sottrazioni fra numeri relativi** il cui risultato è chiamato **somma algebrica**.

Operando con i numeri relativi, la differenza fra due numeri è sempre possibile perché la sottrazione viene trasformata in un'addizione. Una successione di addizioni e sottrazioni si trasforma quindi in una successione di sole addizioni:

$$(+9) + (-3) - (-7) - (+2) + (-6) =$$
$$= (+9) + (-3) + (+7) + (-2) + (-6) = +5$$

Per semplificare la scrittura si può eliminare il simbolo di addizione fra due addendi e le parentesi e omettere il segno + se il primo addendo è positivo:

$$9 - 3 + 7 - 2 - 6 = +5$$

Per semplificare il modo di scrivere un'addizione algebrica si possono eliminare le parentesi e i segni di operazione seguendo questi accorgimenti:

- se la parentesi è preceduta dal segno + si scrivono i numeri relativi ognuno con il proprio segno;
- se la parentesi è preceduta dal segno − si sostituisce ogni numero relativo con il proprio opposto.

Moltiplicazione nell'insieme R

Nell'insieme **N la moltiplicazione è l'operazione che associa a due numeri un terzo numero che si ottiene addizionando tanti addendi uguali al primo quante sono le unità del secondo**.

I termini della moltiplicazione possono avere segno positivo o negativo.

Fattori concordi positivi

$(+5) \cdot (+4) = (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = +20$

Fattori discordi (un fattore negativo e l'altro positivo)

$(-5) \cdot (+4) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$

Fattori discordi (un fattore positivo e l'altro negativo)

$(+5) \cdot (-4)$ = in **R** vale la proprietà commutativa, come in **N** per cui:

$= (-4) \cdot (+5) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$

Fattori concordi negativi

$(-5) \cdot (-4)$ = per risolverla è necessario applicare altre proprietà della moltiplicazione valide in **N** e che quindi devono valere anche in **R**.

Moltiplicazione nell'insieme R

Il **prodotto di due numeri relativi** è un numero relativo avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, segno positivo se i fattori sono concordi e segno negativo se i fattori sono discordi.

Il **prodotto di più numeri relativi** è un numero relativo che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e:

- segno positivo se i fattori sono tutti positivi o se quelli negativi sono in numero pari;
- segno negativo se i fattori negativi sono in numero dispari.

·	+	−
+	+	−
−	−	+

CASI PARTICOLARI DI MOLTIPLICAZIONE

- Se uno dei fattori è zero, il prodotto è zero:

  $(-5) \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $0 \cdot (-2) = 0$

- Il prodotto di due fattori, di cui uno è + 1, è uguale all'altro fattore:

  $(+5) \cdot (+1) = +5$ $\qquad$ $(+1) \cdot (-2) = -2$

- I prodotto di due fattori, di cui uno è − 1, è uguale all'opposto dell'altro fattore:

  $(+5) \cdot (-1) = -5$ $\qquad$ $(-1) \cdot (-2) = +2$

Moltiplicazione nell'insieme R

RECIPROCO DI UN NUMERO RELATIVO

Estendiamo la definizione di numero reciproco di un dato numero dall'insieme $\mathbf{Q}^+$ all'insieme **R**.

Due numeri relativi sono l'uno il reciproco dell'altro se il loro prodotto è uguale a +1:

$+\frac{4}{7}$ reciproco di $+\frac{7}{4}$ infatti $\left(+\frac{4}{7}\right) \cdot \left(+\frac{7}{4}\right) = +1$

-5 reciproco di $-\frac{1}{5}$ infatti $(-5) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = +1$

Non esiste il reciproco di zero.

Divisione nell'insieme R

Nell'insieme **N la divisione è l'operazione che associa a due numeri un terzo numero che moltiplicato per il secondo dà per risultato il primo**.

Dividendo e divisore possono essere numeri positivi o negativi:

$(+21) : (+3) = +7$ infatti $(+7) \cdot (+3) = +21$

$(-21) : (+3) = -7$ infatti $(-7) \cdot (+3) = -21$

$(+21) : (-3) = -7$ infatti $(-7) \cdot (-3) = +21$

$(-21) : (-3) = +7$ infatti $(+7) \cdot (-3) = -21$

Il **quoziente di due numeri relativi** è un numero relativo che ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti, segno positivo se i due numeri sono concordi e segno negativo se sono discordi.

:	+	−
+	+	−
−	−	+

Il **quoziente di due numeri relativi** si ottiene moltiplicando il primo numero per il reciproco del secondo.

Divisione nell'insieme R

CASI PARTICOLARI DI DIVISIONE

- Se il dividendo è zero e il divisore è diverso da zero, il quoziente è zero:

  $0 : (-3) = 0$

- Se il divisore è zero e il dividendo è diverso da zero, non è possibile eseguire la divisione:

  $(+7) : 0 =$ impossibile

- Se il dividendo e il divisore sono zero, la divisione è indeterminata:

  $0 : 0 =$ indeterminata

- Se il divisore è + 1, il quoziente è uguale al dividendo:

  $(-33) : (+1) = -33$

- Se il divisore è − 1, il quoziente è uguale all'opposto del dividendo:

  $(-33) : (-1) = +33$

Proprietà delle quattro operazioni nell'insieme R

Nell'insieme **R** valgono le proprietà delle operazioni studiate negli insiemi **N** e **Q⁺**.

proprietà	operazioni in N		operazioni in R	
	addizione	moltiplicazione	addizione	moltiplicazione
commutativa	sì	sì	sì	sì
associativa	sì	sì	sì	sì
elemento neutro	sì	sì	sì	sì
distributiva	sì		sì	

L'elemento neutro per l'addizione è 0:

$+4 + 0 = +4$ $\qquad$ $(-8) + 0 = -8$

L'elemento neutro per la moltiplicazione è + 1:

$(+4) \cdot (+1) = +4$ $\qquad$ $(+1) \cdot (-8) = -8$

Per calcolare la somma di più numeri relativi possiamo calcolare la somma di tutti gli addendi positivi, quella di tutti gli addendi negativi e poi addizionare i due numeri relativi così ottenuti:

$-12 + 4 + 3 - 8 + 14 =$ applichiamo la proprietà commutativa

$= +4 + 3 + 14 - 12 - 8 =$ applichiamo la proprietà associativa

$= +21 - 20 = +1$

La **proprietà distributiva** può essere applicata nei due versi:

$$+5 \cdot (-3 + 7) = +5 \cdot (-3) + 5 \cdot (+7)$$

Espressioni algebriche

Per **calcolare il valore di un'espressione** nell'insieme **R** si seguono le stesse regole applicate negli insiemi **N** e $\mathbf{Q^+}$:

- si risolvono prima i calcoli compresi nelle parentesi tonde, poi quelli compresi nelle parentesi quadre e infine quelli nelle parentesi graffe;
- all'interno di ogni parentesi si eseguono prima le moltiplicazioni e le divisioni e poi le addizioni e le sottrazioni;
- si applicano, quando possibile, le proprietà delle quattro operazioni.

Per risolvere la seguente espressione si può procedere in due modi:

$$\mathbf{(-9) \cdot (+4) + (+9) : [(-2) - (+15 - 10) + (+7 - 9)] =}$$

1. Si addizionano i numeri in parentesi e poi si eliminano le parentesi:

$$= -36 + (+9) : [(-2) - (+15 - 10) + (+7 - 9)] = -36 + (+9) : [(-2) - (+5) + (-2)] =$$

$$= -36 + (+9) : [-2 - 5 - 2] = -36 + (+9) : (-9) = -36 - 1 = -37$$

2. Si eliminano le parentesi e il segno che le precede, ricordando che:

- se davanti alla parentesi c'è il segno + si lascia invariato il segno di ciascun numero in parentesi;
- se davanti alla parentesi c'è il segno − si cambia segno a ciascun numero in parentesi.

$$= -36 + (+9) : [(-2) - (+15 - 10) + (+7 - 9)] = -36 + (+9) : [-2 - 15 + 10 + 7 - 9] =$$

$$= -36 + (+9) : (-9) = -36 - 1 = -37$$

Potenza di numeri relativi nell'insieme R

Nell'insieme **N elevare a potenza un numero vuol dire moltiplicare tante volte la base quante lo indica l'esponente**.

Nei numeri relativi, non solo la base può assumere valori positivi o negativi, ma anche l'esponente.

POTENZE CON ESPONENTE POSITIVO

La **potenza di un numero relativo con esponente intero positivo** è un numero relativo avente per valore assoluto la potenza del valore assoluto della base e:

- segno negativo se la base è negativa e l'esponente dispari;
- segno positivo in tutti gli altri casi.

- **Base positiva con esponente pari**: $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = +25$
- **Base positiva con esponente dispari**: $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +125$
- **Base negativa con esponente pari**: $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$
- **Base negativa con esponente dispari**: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Potenza di numeri relativi nell'insieme R

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Anche nell'insieme **R** sono valide le proprietà delle potenze che valgono negli insiemi **N**, $\mathbf{Q^+}$ ed $\mathbf{R^+}$.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad a^n : a^m = a^{n-m}$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $\qquad a^m : b^m = (\frac{a}{b})^m$ $\qquad (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

POTENZE CON ESPONENTE NEGATIVO

La **potenza di un numero relativo diverso da zero con esponente intero negativo** è una potenza che ha per base il reciproco della base e per esponente l'opposto dell'esponente:

$$a^{-n} = +\frac{1}{a^n}$$

Per calcolare:

$$\mathbf{(+5)^2 : (+5)^4}$$

si può procedere in due modi:

$$(+5)^2 : (+5)^4 = \frac{(+5)^2}{(+5)^4} = \frac{(+5)\cdot(+5)}{(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(+5)^2}}$$

$$(+5)^2 : (+5)^4 = (+5)^{2-4} = \mathbf{(+5)^{-2}}$$

Estrazione di radice nell’insieme R

Nell’insieme **N la radice quadrata di un numero è quel numero che, elevato alla seconda, dà come risultato il numero dato**.

Il radicando può essere un numero positivo o negativo.

RADICE QUADRATA DI UN NUMERO POSITIVO

La **radice quadrata di un numero relativo positivo** ha due risultati aventi lo stesso valore assoluto ma segno opposto.

Per calcolare $\sqrt{+\,\mathbf{81}}$ dobbiamo determinare un numero che, elevato alla seconda, dia per risultato + 81:

$(+\,9)^2 = +\,81$ ma anche $(-\,9)^2 = +\,81$

L’operazione di estrazione di radice quadrata ha quindi due risultati, si scrive:

$\sqrt{+\,\mathbf{81}}$ **= ± 9** e si legge *la radice quadrata algebrica di* + 81 *è più o meno* 9.

RADICE QUADRATA DI UN NUMERO NEGATIVO

$\sqrt{-\,\mathbf{81}}$ **= ?**

Non esiste nessun numero relativo che elevato al quadrato dà un numero negativo perché, elevando alla seconda un numero relativo, otteniamo sempre un numero positivo.

Nell’insieme R la radice quadrata di un numero negativo non esiste.

Lattes

Estrazione di radice nell'insieme R

RADICE CUBICA

La **radice cubica di un numero positivo** è un numero positivo.

Per calcolare:

$$\sqrt[3]{+\,125}$$

dobbiamo determinare un numero che elevato al cubo dia per risultato + 125:

$(+\,5)^3 = +\,125$ quindi $\sqrt[3]{+\,125} = +5$

La **radice cubica di un numero negativo** è un numero negativo.

Per calcolare:

$$\sqrt[3]{-\,125}$$

dobbiamo determinare un numero che elevato al cubo dia per risultato – 125:

$(-\,5)^3 = -\,125$ quindi $\sqrt[3]{-125} = -\,5$

Lattes